Grado en Biotecnología – Análisis Matemático

Evaluación 3

1. (2 puntos) La evolución de una población de ranas está descrita por la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = Ax_n(2 - x_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

donde A es un parámetro positivo.

a) ¿Para qué valores de $A > 0$ el modelo tiene sentido biológico?

b) Calcula los puntos de equilibrio del modelo y estudia su estabilidad.

2. (5 puntos) Una población de hembras está dividida en dos grupos de edad: jóvenes y adultas. En cada período 2/5 de las jóvenes llegan a adultas. El número medio de crías hembras por cada hembra joven es de 8/5 y el de las adultas es de 2.

a) Calcula la matriz $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n}\mathbf{M}^n$ donde $\mathbf{M}$ es la matriz de Leslie que describe la dinámica de esta población y λ es el valor propio dominante.

b) Explica el comportamiento de la población a largo plazo.

Tanto en a) como en b) enuncia los resultados teóricos que utilizas.

3. (3 puntos) Supongamos que al realizar estudios climáticos en una determinada zona obtenemos los siguientes datos. Si un día es caluroso, entonces la probabilidad de que el día siguiente sea también caluroso es 3/5, y la probabilidad de que haga frío 2/5. Por otro lado, si un día es frío, entonces 1/5 es la probabilidad de que el día siguiente siga siendo frío y 4/5 de que sea un día caluroso. Sea $\mathbf{X}(n) = (x_1(n), x_2(n))$ el vector que da las probabilidades $x_1(n)$ de que el día n sea caluroso y $x_2(n)$ de que sea frío.

a) Expresa este proceso como una cadena de Markov, $\mathbf{X}(n+1) = \mathbf{M}\mathbf{X}(n)$, donde $\mathbf{M}$ es la matriz de transición.

b) ¿Cuál es a largo plazo la probabilidad de que un día sea frío o caluroso?

c) Si hoy es un día caluroso, ¿cuál es la probabilidad de que pasado mañana sea frío?.

Tienes que trabajar con matrices cuadradas de orden 2. Los cálculos son muy sencillos. **No uses decimales**.

Granada, 5 de diciembre de 2019